Сборник задач для курса “МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ”, КЛШ-2013.

Артём Абанов

16 мая 2013 г.

Аннотация

Здесь собраны примеры задач для использования на семинарских занятиях к курсу лекций в КЛШ-2013. В каждом разделе (занятии) задачи идут в порядке возрастания сложности.

Как проводить семинарские занятия.

- Начинать семинар с трёпа (2-3 минуты).
- Не решать задачи у доски!
- Школьников надо рассадить так, чтобы к любому можно было быстро подойти.
- Каждый школьник делает задачи индивидуально. Для этого к семинарскому занятию надо быть готовым. Идеально иметь кучу задач написанных на карточках или отдельных клочках бумаги.
- Ваша задача — подбирать каждому школьнику задачи чуть-чуть выше того уровня на котором ему/ей удобно и комфортно.
- Когда школьник решил задачу – i) похвалить, ii) проверить размерность, iii) проверить/обратить внимание на предельные случаи: можно ли ответ понять без вычислений?
- Если задача у школьника вызывает затруднение — похвалить и помочь коротким советом индивидуально.
- Если затруднения продолжаются — похвалить, придумать подзадачу которая ему/ей по силам и сделать поправку на будущее.
- Если замечаете, что школьники устали рассказать коротко какую-нибудь байку, лучше в тему.
- Обращать внимание школьников на смысл их действий и смысл полученных ответов. У формул есть смысл!

РАСПИСАНИЕ.

1. **Производная**

   - Введение.
   - Содержание курса.
   - Движение. Координаты. Функции.
   - Скорость. Средняя скорость. Мгновенная скорость.
   - Предел. Производная. Обозначение производной.
   - Примеры: равномерное и равноускоренное движение.
   - Линейность дифференцирования.
   - Дифференцирование произведения. Функция $y(x) = x^n$, $n > 0$.
   - Дифференцирование отношения. Функция $y(x) = x^n$, $n < 0$.
   - Геометрический смысл производной. Максимум и минимум.
   - Производная сложной функции. Функция $y(x) = (x + 1)^2$ и $y(x) = (x^2 + 1)^2$. Производная обратной функции. Функция $y(x) = x^{1/q}$.

2. **Показательная и логарифмическая функции**

   - Показательная функция. Её график. Свойства.
   - Производная показательной функции.
   - Число e.
   - Логарифмическая функция. Её график. Свойства.
   - Производная логарифмической функции.

3. **Интеграл.**

   - Восстановление пути по скорости.
   - Интеграл. Обозначения.
   - Геометрический смысл.
   - Первообразная. Свободная константа.
   - Формула Ньютона-Лейбница.
   - Примеры.

4. **Вычисление площадей, объёмов, масс и моментов инерции.**

   - Нахождение площадей. Негладкая граница. Отрицательная площадь.
   - Нахождение объёмов.
   - Нахождение массы тел с неоднородной плотностью.
   - Нахождение момента инерции.

5. **Радиоактивный распад. Атмосферное давление. Дифференциальное уравнение $y' = ky$**

   - Радиоактивный распад.
   - Атмосферное давление.
   - Дифференциальное уравнение $y' = ky$. Линейность.
   - Начальные условия.

6. **Вытекание воды. Дифференциальное уравнение $y' = f(y)$. Задача о трении Намотанного каната.**

   - Вытекание воды.
   - Дифференциальное уравнение $y' = f(y)$.
   - Задача о трении Намотанного каната.

7. **Ускорение как производная от скорости. Малые колебания. Задача о падении в воздухе с учётом сопротивления воздуха.**

   - Ускорение как производная от скорости.
   - Малые колебания.
   - Задача о падении в воздухе с учётом сопротивления воздуха.

Занятие 1. Производная.

- Введение.
- Содержание курса.
- Движение. Координаты. Функции.
- Скорость. Средняя скорость. Мгновенная скорость.
- Предел. Производная. Обозначение производной.
- Примеры: равномерное и равноускоренное движение.
- Линейность дифференцирования.
- Дифференцирование произведения. Функция $y(x) = x^n$, $n > 0$.
- Дифференцирование отношения. Функция $y(x) = x^n$, $n < 0$.
- Геометрический смысл производной. Максимум и минимум.
- Производная сложной функции. Функция $y(x) = (x+1)^2$ и $y(x) = (x^2+1)^2$. Производная обратной функции. Функция $y(x) = x^{1/q}$.

Задача 1.

Поезд прошёл некоторый путь, причём первую половину он шёл со скоростью 40 км/ч, а вторую со скоростью 60 км/ч. Какова была средняя скорость поезда?

Задача 2.

По графику квадратного трёхчлена $y = ax2 + bx + c$ определить знаки его коэффициентов.

Задача 3.

По графику функции $y = f(x)$ нарисовать график её производной $f'(x)$

Задача 4.

Написать уравнение прямой, касательной к графику функции $y = 3x - x^2$ в точке этого графика с абсциссой $x_0 = 2$.

Задача 5.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 1$ на отрезке $[-3, 1]$.

Задача 6.

Найти производные функций:
а) $y = (x^2 + 1)^{2013}$; б) $y = \sin x^2$; в) $y = \sqrt{x^2 + 1}$; г) $y = \sin(\cos(x))$; д) $y = \sqrt[10]{x^5 + 1}$; е) $y = \mathrm{tg}(x)$; и так далее.

Задача 7.

В равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами длины 1 вписать прямоугольник наибольшей площади со стороной, лежащей на гипотенузе этого треугольника. Какова эта наибольшая площадь?

Задача 8.

Написать формулы, задающие координаты точки, равномерно движущейся по окружности, как функции времени. Найти производные этих функций. Что характеризуют эти производные? Как увидеть из полученных формул, что скорость движения направлена по касательной к окружности?

Задача 9.

Две среды разделены плоской границей. Луч света, идущий из точки, лежащей по одну сторону границы, в точку, лежащую по другую сторону, избирает путь, требующий наименьшего времени. Что это за путь, если скорость движения в указанных средах равна v_1 и v_2 соответственно?

Занятие 2. Показательная и логарифмическая функции.

- Показательная функция. Её график. Свойства.
- Производная показательной функции.
- Число e.
- Логарифмическая функция. Её график. Свойства.
- Производная логарифмической функции.

Задача 1.

Пользуясь только определением логарифмической функции, вычислить:
а) $\log_2 256$; б) $\log_4(2^{2012})$; в) $\log_3(27^{15})$; г) $\log_{27}(3^{99})$; д) $\ln e^{2013}$; е) $2^{\log_2 5}$; ё) $9^{\log_3 10}$; ж) $e^{\ln 2013}$; з) $a^{\log_a x}$.

Задача 2.

Доказать формулу $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, где $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$.

Задача 3.

Доказать, что $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $x \neq 1$.

Задача 4.

Используя приближённые значения $\ln 10 \approx 2,3$, $\log_{10} e \approx 0,4343$, $\log_{10} 2 \approx 0,30$, найти без микрокалькулятора приближённые значения (с точностью 10%):
а) $\ln 100$; б) $\ln 0,1$; в) $\log_{10} 40$; г) $\log_{10} 5$; д) $\log 1_{10} 32$; е) $\ln 2$; ё) $\ln 25$; ж) $\ln 20$; з) $\ln 0,5$; и) $\ln 0,01$; й)* e^{10}.

Задача 5.

Найти производные функций:
а) $y = e^{x^2}$; б) $y = e^{e^x}$; в) $y = x^x$ – это может быть сложно; г) $y = \ln(x^4 + e^x)$; д) $y = \ln(\cos(x^2 + (\ln x)^5))$;
е) $y = \ln x^2$; ё) $y = \frac{\ln x}{x^2+1}$; ж) $y = \ln \ln x$; з) $y = \log_2 x$; и) $y = 2^x$; й) $y = \log_{10}(x^3 + 1)$; и так далее.

Задача 6. $*$

Определить без микрокалькулятора что больше: а) $\log_2 3$ или $\log_3 4$; б) $\log_5 7$ или $\log_7 8$?

Задача 7. $*$

Придумать способ приближённого вычисления $\log_a x$ для данных x и a с любой наперёд заданной точностью. Вычислить с помощью этого способа $\log_2 3$ с точностью до $0,1$.

Задача 8. $*$

Вычислить без микрокалькулятора $\log_{10} 2$ с точностью до $0,1$.

Задача 9. $*$

Вычислить без микрокалькулятора $\log_{10} e$ с точностью до $0,1$.

Задача 10. $*$

Доказать, что последовательность $(1+1/n)^n$ возрастает с ростом n, а последовательность $(1+1/n)^{n+1}$ убывает с ростом n. Вывести отсюда, что $(1+1/n)^n < e < (1+1/n)^{n+1}$.

Задача 11. $*$

Доказать, что $2 < e < 3$.

Занятие 3. Интеграл.

- Восстановление пути по скорости.
- Интеграл. Обозначения.
- Геометрический смысл.
- Первообразная. Свободная константа.
- Формула Ньютона-Лейбница.
- Примеры.

Задача 1.

Скоростьточки, движущейся по прямой, меняется по закону
а) $v(t) = t^3$; б) $v(t) = t^{-2}$; в) $v(t) = t^{-1}$; Какой путь будет пройден при $1 \le t \le 2$?

Задача 2.

Вычислить:
а) $\int_0^{\pi/2} \cos(t)dt$; б) $\int_2^8 t^4 dt$; в) $\int_5^{10} \frac{1}{t}dt$; г) $\int_5^7 x^3 dx$; д) $\int_0^1 \sqrt{x}dx$; е) $\int_1^2 \sqrt[4]{x}dx$; ё) $\int_1^2 e^x dx$; ж) $\int_2^4 2^x dx$;
з) $\int_0^\infty e^{-x} dx$;

Задача 3.

Вычислить:
а) $\int x^5 dx$; б) $\int \sin(x)dx$; в) $\int \sqrt{3x}dx$; г) $\int e^{4x} dx$.

Задача 4. Для формулы Симпсона.

Доказать, что если $f(x) = ax^2 + bx + c$, то

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt = \frac{1}{6}\left(f(x_1) + 4f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f(x_2)\right)(x_2 - x_1).$$

Задача 5. $*$

Доказать, что если $y = f(x)$, и $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, то

$$\int_{y_1}^{y_2} g(y)dy = \int_{x_1}^{x_2} g(f(x))f'(x)dx$$

Задача 6. $*$

Вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

Занятие 4. Вычисление площадей, объёмов, масс и моментов инерции.

- Нахождение площадей. Негладкая граница. Отрицательная площадь.
- Нахождение объёмов.
- Нахождение массы тел с неоднородной плотностью.
- Нахождение момента инерции.

Задача 1.

Найти площадьпод одной волной синусоиды $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$.

Задача 2.

Можно ли вычислитьсуммарную площадь двух волн синусоиды как $\int_0^{2\pi} \sin(x)dx$? Чему равны площадь и этот интеграл?

Задача 3.

Найти площадь между параболами $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$ и прямой $x = 0$.

Задача 4.

По графику функции $f(x)$ нарисовать график какой-нибудь её первообразной.

Задача 5.

Найти объём шара.

Задача 6.

Найти объём шарового слоя: куска шара, высекаемого двумя параллельными плоскостями, проходящими по одну сторону от центра.

Задача 7.

Получить формулы для объёмов пирамиды и конуса, а также усечённой пирамиды и усечённого конуса.

Задача 8. $*$

Вывести из задачи “*Для формулы Симпсона*” из предыдущего задания, что объёмы, указанные в двух предыдущих задачах, могут быть найдены по формуле Симпсона:

$$V = \frac{H}{6}\left(S_1 + 4S_{av} + S_2\right),$$

где H — высота, S_1, S_2 – площади оснований, S_{av} – площадь срединного сечения.

Задача 9.

Найти предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}},$$

пользуясь представлением интеграла от x^k в виде предела сумм.

Задача 10. $*$

С какой силой бесконечная плоская однородная пластина толщины d и плотности ρ притягивает точечную массу m находящуюся на расстоянии h от центра пластины, если а) $h > d/2$; б) $h < d/2$?

Задача 11. $*$

С какой силой притягиваються две перпендикулярные тонкие бесконечные оси с линейной плотностью ρ, если минимальное расстояние между ними h?

Занятие 5. Радиоактивный распад. Атмосферное давление. Дифференциальное уравнение $y' = ky$

- Радиоактивный распад.
- Атмосферное давление.
- Дифференциальное уравнение $y' = ky$. Линейность.
- Начальные условия.

Задача 1.

За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 1% от первоначального количества?

Задача 2.

В течение года из каждого грамма радиоактивного вещества распадается $0,44$мг (1мг$= 10^{-3}$г$= 10^{-6}$кг). Через сколько лет распадётся половина имеющегося количества?

Задача 3.

В куске горной породы содержится 100мг урана и 14мг уранового свинца. Известно, что уран распадается наполовину за $4,5 \times 10^9$ лет и что при полном распаде 238г урана образуется 206 г уранового свинца. Определить возраст горной породы. Считать, что в момент образования горная порода не содержала свинца, и пренебречь наличием промежуточных радиоактивных продуктов между ураном и свинцом (так как они распадаются намного быстрее урана).

Задача 4.

В костях живого человека один из 5×10^{11} атомов углерода является изотопом ^{14}C (период полураспада 5700 лет), остальные атомы углерода – устойчивые изотопы ^{12}C. При исследовании образца массой 1г одной из человеческих костей, найденных на стоянке первобытного человека, за 10 мин зарегистрировано 100 распадов атомов ^{14}C. Считая, что изучаемый образец состоит только из углерода (этого можно добиться специальной обработкой), оценить возраст образца (напомним, что в 12г углерода содержится 6×10^{23} атомов).

Задача 5.

Планета “Адиабата” имеет точно такие же форму, размеры и массу, как Земля, но её атмосфера состоит из газа, давление и плотностькоторого связаны по адиабатическому закону $p == C\rho^{4/3}$, причём на поверхности планеты $p = p_0 = 10$Н/см^2 $= 1$атм и $\rho = \rho_0 = 0,0012$ г/см^3 (т. е. как на Земле). Найти высоту атмосферы этой планеты.

Занятие 6. Вытекание воды. Дифференциальное уравнение $y' = f(y)$. Задача о трении Намотанного каната.

- Вытекание воды.
- Дифференциальное уравнение $y' = f(y)$.
- Задача о трении Намотанного каната.

Задача 1.

Цилиндрический бак поставлен вертикально и имеет отверстие в дне. Половина воды из полного бака вытекает за 5мин. За какое время вытечет вся вода?

Задача 2.

Воронка имеет форму конуса, обращённого вершиной вниз, с радиусом основания $R = 6$см и высотой $H = 10$см. За какое время вытечет из воронки вся вода через круглое отверстие диаметром $0,5$см, сделанное в вершине конуса?

Задача 3.

Две одинаковые конические воронки высотой 1м и радиусом основания 1м наполнены водой и расположены одна вершиной вверх, а другая – вершиной вниз. В дне каждой из них сделано отверстие диаметром 1см. Из какой воронки быстрее вытечет вода? Во сколько раз? Найти время вытекания воды из каждой воронки.

Задача 4.

Найти время вытекания воды из чаши, имеющей форму полусферы радиусом 1м, через отверстие в дне диаметром 1см.

Задача 5.

Чаша имеет форму параболоида: поверхности вращения куска параболы $y == ax^2$, $0 \leq x \leq b$. Найти время вытекания воды из этой чаши через отверстие в дне диаметром d. Вычислитьэто время при $a = 1$м$^{-1}$, $b = 1$м, $d = 1$см.

Задача 6.

Чай охладился за 10мин от $100°$C до $60°$C. За какое время он остынет до $25°$C, если температура воздуха в комнате $20°$C? (Скорость остывания пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.)

Задача 7.

В баке находится 100л раствора, содержащего 10кг соли. В бак непрерывно подаётся вода (5л в минуту), которая переме-шивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скоростью. Сколько соли останется в баке через час?

Задача 8.

Сосуд объёмом 20л содержит воздух (80% азота и 20% кислорода). В сосуд втекает $0,1$л азота в секунду, который непрерывно перемешивается, а вытекает такое же количество смеси. Через сколько времени в сосуде будет 99% азота?

Задача 9. $*$

В химической реакции атомы или молекулы вещества A объединяются в молекулы A_2

$$A + A \longrightarrow A_2.$$

(так может обстоять дело, например, с атомарным водородом или кислородом, а также при образовании димеров). При этом скорость реакции пропорциональна количеству сталкивающихся пар, т. е. квадрату имеющейся в рассматриваемый момент массы данного вещества. В некотором сосуде через 5мин после начала реакции осталась лишь половина непрореагировавшего вещества A. Через какое время останется 1% от исходного количества вещества?

Занятие 7. Ускорение как производная от скорости. Малые колебания. Задача о падении в воздухе с учётом сопротивления воздуха.

- Ускорение как производная от скорости.
- Малые колебания.
- Задача о падении в воздухе с учётом сопротивления воздуха.

Задача 1.

Предположим, что вдоль всей земной оси от Северного полюса к Южному прорыт колодец и какой-то предмет уронили в этот колодец (без начальной скорости) на Северном полюсе. Как он будет двигаться? За какое время он достигнет центра Земли? Достигнет ли он Южного полюса? При решении надо использоватьтот факт, что на небольшое тело, находящееся внутри Земного шара на расстоянии d от его центра, действует сила притяжения, направленная к центру Земли и равная по величине силе притяжения его материальной точкой (расположенной в центре Земли), имеющей массу, равную массе лишьтой части Земного шара, которая попадает в шар радиуса d с центром в центре Земли (это утверждение, доказанное Ньютоном, равносильно тому, что если есть тонкая однородная сфера, то внутри неё все силы притяжения уравновешиваются, а снаружи её притяжение таково, как если бы вся масса была сосредоточена в центре). При решении задачи считать, что плотность Земли всюду постоянна. Радиус Земли равен 6400км. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача 2. $*$

На Южном полюсе Земли установлена пушка, дуло которой направлено вертикально вверх. Из этой пушки выстрелили снарядом. Пренебрегая сопротивлением воздуха и притяжением воздуха и Земли к другим небесным телам, описать, как будет меняться скорость снаряда в зависимости от расстояния от снаряда до Земли. С какой скоростью должен вылететьснаряд, чтобы он никогда не вернулся на Землю?

Задача 3.

Силу трения/вязкось можно описать как силу пропорциональную скорости. Тогда уравнение движения будет иметь вид $x'' + \gamma x' + \omega^2 x = 0$. Решить уравнение $y'' - k^2 y = 0$. и с помощью этого решения описать колебания шарика на пружинке с большим трением, т. е. при условии $\omega^2 \ll \gamma^2$. Сколько раз в этом случае решение $x(t)$ может обращаться в ноль?

Задача 4.

Лодка замедляет движение под действием сопротивления воды, пропорционального скорости лодки. Начальная скорость лодки $1,5$м/с, через 4с скорость её становится равна 1м/с. Когда скоростьуменьшится до 1см/с? Какой путь пройдёт лодка до остановки?

Задача 5.

Мотор лодки создаёт постоянную силу тяги, а сила тре- ния о воду пропорциональна скорости.

а) Доказать, что скорость лодки не может превысить некоторой предельной скорости $v_{\text{пр}}$.

б) Найти скорость лодки через 5с после начала движения, если $v_{\text{пр}} = 30$км/ч, а скоростьеё после 2с была равна 5км/ч.

в) Найти путь, пройденный лодкой за 5с.

г) Когда скорость лодки достигнет 90% от предельной?

Задача 6.

При падении тела в жидкости для небольших скоростей сила сопротивления пропорциональна скорости.

а) Считая этот закон выполненным, доказать существование предельной скорости падения.

б) Считая предельную скорость равной 5м/с, выяснить, через какое время скоростьтела станет равной $4,5$м/с.

в) Найти путь, проходимый падающим телом за первые 4с падения.

Задача 7.

а) Нарисовать графики функций $y = \operatorname{ch} x$, $y = $ shx, $y = \operatorname{th} x$.

б) Доказать, что $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, $(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x$, $(\operatorname{th} x)' = 1/\operatorname{ch}^2 x$.

в) Доказать, что $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

д) Доказать теоремы сложения:

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$$

Задача 8. $*$

Футбольный мяч массой $0,4$кг брошен вверх со скоростью 20м/с. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и равно $0,005$Н при скорости 1м/с. Вычислить время подъёма мяча и наибольшую высоту подъёма. Как изменятся результаты, если пренебречь сопротивлением воздуха?

Задача 9. $*$

Футбольный мяч массой $0,4$кг падает с высоты 20м (без начальной скорости). Сопротивление воздуха пропорционально квадрату его скорости и равно $0,005$Н при скорости 1м/с. Найти время падения и скорость мяча в конце падения. Как изменятся результаты, если не учитывать сопротивление воздуха?

Список литературы

[1] М. А. Шубин, *МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ*, Издательство Московского центра непрерывного математического образования. Москва, 2003. http://www.mccme.ru/free-books/mmmf-lectures/book.23.pdf